局所探索法による安定結婚問題の近似

AUTHOR(S):

岡本, 和也; 宮崎, 修一; 岩間, 一雄

CITATION:

岡本, 和也 ...[et al]. 局所探索法による安定結婚問題の近似. 電子情報通信学会技術研究報告 2004, 104(16): 53-60: COMP2004-8.

ISSUE DATE:

2004-04-15

社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.
COMP2004-8 (2004-04)

局所探索法による安定結婚問題の近似

岡本　和也† 　宮崎　修一†† 　岩間　一雄†

† 京都大学 大学院情報学研究科
〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
†† 京都大学 学術情報メディアセンター
〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
E-mail: †{okia,iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

あらまし　安定結婚問題の例題では、各個人の希望リストは異性全員を含み、完全に順位付けされている必要がある。しかし、実世界での応用を考えると、ペアになりたくない相手は希望リストに書かない不完全リストや、好みが同じ程度の人は優劣をつけなくて良い同順位リストという 2 つの自然な拡張が考えられる。どちらか一方の拡張のみを許した問題は多項式時間で解くことができるが、両方の拡張を許した場合、最大サイズの安定マッチングを見つける問題は NP 困難になることが知られている。任意の 2 つの安定マッチングのサイズは最大でも 2 倍しか異ならないということは簡単にわかるため、近似度が 2 の近似アルゴリズムは自明である。2 よりも良い近似度を実現する近似アルゴリズムを与える結果はいくつか知られているが、それらは、例えば同順位の長さや出現数などの制限を加えられた下でのものだけである。現在まで一般的な入力に対し、近似度が 2 未満となる近似アルゴリズムは知られていない。本論文では、一般的な例題に対し、近似度が 2 未満となる非自明な結果を初めて示した。我々のアルゴリズムの近似度は $2 - c\frac{\log N}{N}$ である。(ここで、c は任意の正定数で、N は入力中の男性の数である。)

キーワード　安定結婚問題、不完全リスト、同順位、近似アルゴリズム、局所探索法

Approximating the Stable Marriage Problem by Local Search

Kazuya OKAMOTO†, Shuichi MIYAZAKI††, and Kazuo IWAMA†

† Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan
†† Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan
E-mail: †{okia,iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

Abstract　An instance of the classical stable marriage problem requires all participants to submit a strictly ordered preference list containing all members of the opposite sex. However, considering applications in real-world, we can think of two natural relaxations, namely, incomplete preference lists and ties in the lists. Either variation leaves the problem polynomially solvable, but it is known that finding a maximum cardinality stable matching is NP-hard when both of these variations are allowed. It is easy to see that the size of any two stable matchings differ by at most a factor of two, and so, an approximation algorithm with a factor two is trivial. There are several contributions that give approximation algorithms with factor better than two, but they are only for restricted instances, such as restricting occurrence of ties and/or lengths of ties. Up to the present, there is no known approximation algorithm with ratio better than two for general inputs. In this paper, we give the first nontrivial result for approximation of factor less than two for general instances. Our algorithm achieves the ratio $2 - c\frac{\log N}{N}$ for an arbitrarily positive constant c, where N denotes the number of men in an input.

Key words　the stable marriage problem, incomplete lists, ties, approximation algorithms, local search

1. はじめに

安定結婚問題は Gale と Shapley によって提唱されたマッチング問題である [7]。この問題の例題は、N 人の男性、N 人の女性、および各個人の希望リストから成る。**希望リスト**とは、各個人の好みに基づき、異性**全員**を**全順序**で並べたリストである。男女間のマッチング M において、以下のような 2 つの条件を満たす男性 m と女性 w のペアを**不安定ペア**という。(i) m は M でマッチしている相手より w の方が好きである。(ii) w は M でマッチしている相手より m の方が好きである。不安定ペアのないマッチングを**安定マッチング**という。安定結婚問題は、与えられた例題に対し、安定マッチングを求める問題である。Gale と Shapley は任意の例題が少なくとも 1 つの安定マッチングを持つことを示した。また、与えられた例題からその安定マッチングを $O(N^2)$ 時間で求める Gale-Shapley アルゴリズムを示した [7]。

しかし、大規模な割り当てシステムへの応用を考えると、各個人（または団体など）が相手方のメンバー全てを全順序で順位付けするというのはあまり現実的ではない。このため、2 つの自然な拡張が考えられている。1 つは希望リストに同順位を含めることを許したものである [9], [15]。同順位を許した時、安定性の定義を修正する必要がある。男性と女性が現在のパートナーより厳密にお互いを好む時、その男女を不安定ペアという。そのような不安定ペアのないマッチングを弱安定（あるいは単に「安定」）であるという。任意の例題に、弱安定マッチングは少なくとも 1 つ存在し、Gale-Shapley アルゴリズムを利用することで $O(N^2)$ 時間で求めることができる [9]。もう 1 つは、パートナーとして受け入れたくない相手をリストに書かないことを許す拡張である。従って、希望リストは不完全リストとなる。ここでも、不安定ペアの定義は拡張される。男性 m と女性 w は、(i) m は自分のマッチしている相手よりも w を好きであるか、現在シングルであるが w をリストに書いている、(ii) w は自分のマッチしている相手よりも m を好きであるか、現在シングルであるが m をリストに書いている、の両方が成り立つとき、(m, w) は不安定ペアであるという。この場合、安定マッチングは完全マッチングになるとは限らない。しかし、1 つの例題に対する全ての安定マッチングはサイズが同じである [8]。Gale-Shapley アルゴリズムにより安定マッチングを 1 つ求めることは多項式時間で可能であるため、最大サイズの安定マッチングを多項式時間で求めるのは自明である。

しかし、同順位と不完全リストの両方の拡張を同時に許した場合、1 つの例題に対し異なったサイズの安定マッチングが存在する可能性があり、最大サイズの安定マッチングを見つける問題（*MAX SMTI* (MAXimum Stable Marriage with Ties and Incomplete lists)）が NP 困難になることが知られている [20], [24]。MAX SMTI に対する近似解法については、以下のことが知られている。同じ例題に対する 2 つの安定マッチングのサイズは最大でも 2 倍しか変わらないことが簡単に分かる（例えば、[24] の定理 5 参照）。また、Gale-Shapley アルゴリズムを利用することにより安定マッチングが多項式時間で求めることができるため、近似度が 2 となる近似アルゴリズムの存在は自明である。最近、制限された入力集合に対して近似度が 2 よりも格段に良い近似アルゴリズム、例えば男性にのみ長さ L の同順位を許した例題に対する近似度が $\frac{2}{(1+1/L^2)}$ となるアルゴリズム [13] や、男性のみに長さ 2 の同順位を許した例題に対する近似度 10/7 の確率アルゴリズム [12] が示された。

本論文では、何の制限もない MAX SMTI 例題に対して近似度が 2 を下回るアルゴリズムを初めて示す。我々の提案する局所探索アルゴリズムの近似度は $2 - c\frac{\log N}{N}$ である。ここで c は任意の正定数である。

関連結果

現実世界において、割り当てシステムに安定結婚問題を利用している例はいくつか存在する。中でも最も有名なものは、研修医を病院に、双方の希望リストを用いて配属するものである。例えばアメリカでは 3 万人を超える研修医を病院に割り当てるシステムに用いられており、NRMP として知られている [9], [23]。日本でもこの種のシステムが 2003 年から用いられ始めて、最初の年には、参加者約 8 千人のうち 95 %以上もがマッチされるという大成功を納めた。その他にもカナダでは CaRMS、スコットランドでは SPA として同様の問題が知られている [16], [17]。その他の応用として、ノルウェー [5] やシンガポール [27] で、生徒を学校に配属するシステムに利用されている。

MAX SMTI に対する近似可能性や近似不可能性の研究結果は数多く知られている。近似不可能性に関しては、MAX SMTI は APX-hard であることが示され [10], [11]、その後（P$\neq$NP の仮定の下で）近似度の下限が 21/19 となることが示された [13]。この下限は同順位を一方の性別にしか許さず、その同順位の長さが 2 で、1 人につき 1 つの同順位しか許さない場合にも成り立つ。近似可能性に関しては、前にも述べたように 1 人当たりの同順位の数や同順位の長さを制限した入力に対して、近似度が 2 よりも良いアルゴリズムが存在する [12], [13], [24]。

SMTI の他にも、強安定マッチング [19], [22] やランク極大マッチング [18] 等、様々なマッチング問題 [1], [4], [6] が最近注目されている。

MAX SMTI と同様に、2-近似アルゴリズムの構築は簡単だが、正の定数 ϵ に対し $(2-\epsilon)$-近似アルゴリズムを構築するのは格段に難しい問題がいくつか存在する。例えば、最小頂点被覆問題 (MIN VC) や最小極大マッチング問題 (MIN MM) といったものである。MAX SMTI の場合と同様、これらの問題に対しても、制限された入力例題に対して 2 よりも良い近似度のアルゴリズム開発すると言ったアプローチがとられている。例えば MIN VC に対しては、最大次数を 3 に制限したグラフ集合に対する近似度 7/6 のアルゴリズム [3] や、最小次数 $\epsilon|V|$ のグラフ集合に対する近似度 $2/(1+\epsilon)$ のアルゴリズム [21] 等が知られている。また、MIN MM については、次数が d である正則グラフに対して $(2-1/d)$-近似アルゴリズムが知られており [28]、平面グラフに対しては PTAS が知られている [26]。制限のない MIN VC に対する現在最良の近似度は、$(2-\frac{\log\log|V|}{2\log|V|})$ と $(2-(1-o(1))\frac{2\ln\ln|V|}{\ln|V|})$ である [2], [14], [25]。

2. MAX SMTI

この節では、最大化問題 MAX SMTI と、近似アルゴリズムの近似度について正確に定義する。MAX SMTI の例題 I は N 人の男性、N 人の女性、および各個人の希望リストで構成されている。希望リストは不完全でも良く、また同順位を含んでも良い。男性 m が I で厳密に女性 w_j よりも w_i のことを好きである時、$w_i \succ_m w_j$ と書く。もし m のリストで w_i と w_j が同順位である時、$w_i =_m w_j$ と書く。$w_i \succ_m w_j$ あるいは $w_i =_m w_j$ である時、$w_i \succeq_m w_j$ が成り立つものとする。女性の希望リストに関しても同様に表記する。ここで M をマッチングとす

る。もし M で男性 m と女性 w がマッチしている時（つまり、m の M での相手が w である時）、$M(m) = w$、$M(w) = m$ と書く。マッチング M において、人 p がマッチしていないとき、p は M で**シングル**であると言う。以下の 3 条件を全て満たす時、(m, w) を M の**不安定ペア**という。(i) $M(m) \neq w$。(ii) $w \succ_m M(m)$、あるいは m は w をリストに書いているが M でシングルである。(iii) $m \succ_w M(w)$、あるいは w はリストに m を書いているが M でシングルである。マッチング M に対し、$BP(M)$ は M のすべての不安定ペアの集合を表す（BP とは不安定ペア (Blocking Pair) から取った)。$BP(M) = \emptyset$ である時、M は**安定である**という。*MAX SMTI* は最大サイズの安定マッチングを求める問題である。

最大化問題に対する近似アルゴリズム T の効率の良さの尺度（すなわち**近似度**）は、以下のように定義される。T の近似度は、サイズが N の全ての例題 x に対して、$\max\{opt(x)/T(x)\}$ で表される。(但し、$opt(x)$ は最適解のサイズ、$T(x)$ はアルゴリズムの出力する解のサイズを表す。)

3. アルゴリズム LocalSearch (I) の概要

本節では、提案するアルゴリズム LocalSearch の概観を述べる。LocalSearch は MAX SMTI の例題 I を入力とし、2 つのサブルーチン Increase と Stabilize を使う。

Increase は I の安定マッチング M と定数 k に対し、$|S| = k \log N$ となるような M の部分集合 S を入力として与えられる。そして、(必ずしも安定でない) マッチング M_0 を出力する。M_0 は $|M_0| > |M|$ で、$(m, w) \in BP(M_0)$ である不安定ペアは全て、m か w（あるいは両方）が M_0 でシングルという条件を満たしている。Increase はこのようなマッチングを見つけるのに失敗する可能性がある。そのような場合はエラーを返す。

Stabilize は（必ずしも安定でない）マッチング M_0 を入力とする。ただし、M_0 は以下の条件を満たしているとする。$(m, w) \in BP(M_0)$ である不安定ペアは全て、m か w（あるいは両方が）M_0 でシングルである。Stabilize は、サイズが $|M_0|$ 以上の安定マッチングを出力する (補題 5.3)。

図 1 に LocalSearch の詳細な記述を示す。ここで c は、$c < \frac{k}{8}$ を満たす定数とする。while ループが適用されるたびに安定マッチングのサイズが少なくとも 1 ずつ増えているのがわかる。この操作は 7 行目の条件節が true である限り続けられる。後で示すが、この条件節が true となるのは、(1) Increase への入力 S が "良い" 性質を持っており、かつ (2) Increase への入力となる安定マッチングのサイズ $|M|$ が $\frac{OPT}{2} + c \log N$ 以下である場合である (補題 4.1)。(OPT は最大安定マッチングのサイズを表し、c は上で定義した定数である。) さらに、もし $|M| \leq \frac{OPT}{2} + c \log N$ ならば、4 行目で得られた $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の中に "良い" P_i が存在することが言える (補題 3.4)。従って、以下の定理が成り立つ。

[**定理** *3.1*] SMTI 例題 I が与えられると、LocalSearch はサイズが $\frac{OPT}{2} + c \log N$ より大きい安定マッチングを出力する。ただし、OPT は I の最大安定マッチングのサイズである。

定数 k（それに応じて定数 c）は任意に大きく設定できるため、以下の系が成り立つ。

[**系** *3.2*] 任意の正定数 c に対して、LocalSearch の近似度は $2 - c\frac{\log N}{N}$ 以下となる。

アルゴリズム LocalSearch (I)

1: M: $= I$ の任意の安定マッチング;
/* これは任意に同順位を壊し Gale-Shapley アルゴリズムを適用することによって多項式時間で行うことができる。 */
2: **while** (true);
3: {M から任意に $(k + 4c) \log N$ 個のペアを選び、それらのペアから成る集合を P とする;
4: サイズが $k \log N$ である P の全ての部分集合を $P_1, P_2, \cdots, P_n$ とする;
5: **for** $i := 1$ **to** n
6: $M_i :=$ Increase (M, P_i);
/* もし Increase がエラーを返したら、$M_i = \emptyset$ とする。*/
7: **if** ($|M_i| > |M|$ である M_i が存在する)
8: $M_0 := M_i$;
9: **else**
10: 終了し M を返す;
11: $M :=$ Stabilize (M_0);
12: }

図 1 Algorithm LocalSearch

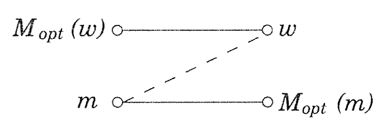

図 2 良い枝 (m, w)

Increase と Stabilize を説明する前に、LocalSearch の 4 行目で得られる $P_1, P_2, \cdots, P_n$ の重要な性質について証明する。

まず、I に対する最大安定マッチングを M_{opt} として固定する。(もちろんアルゴリズムを用いる上ではわからない。) I に対する安定マッチング M を用いて、以下のような二部グラフ $G_{M_{opt},M}$ を定義する。I の人間 1 人に対して、$G_{M_{opt},M}$ の頂点を 1 個用意する。もし $M_{opt}(m) = w$ ならば、頂点 m と w の間に枝を付与する。この枝を **OPT-枝**と呼ぶ。同様に、もし $M(m) = w$ ならば、頂点 m と w の間に枝を付与する。この枝を **M-枝**と呼ぶ。もしも、m が M_{opt} と M の両方で w とマッチしている場合、m と w の間には 2 つの枝が存在することになる。(従って $G_{M_{opt},M}$ は多重グラフである。) それぞれの頂点の次数は高々2 であるため、$G_{M_{opt},M}$ の連結成分はパス、サイクル、孤立頂点のいずれかである。

$G_{M_{opt},M}$ の M-枝を良い枝と悪い枝に分ける。もし M-枝が、OPT-枝から始まり、OPT-枝で終わる長さ 3 のパスの中にある枝の場合、**良い枝**と呼ぶ。そうでない場合**悪い枝**と呼ぶ。$G_{M_{opt},M}$ の M-枝が良い枝（悪い枝）の場合、それに対応する M の枝も、便宜上良い枝（悪い枝）と呼ぶ。

良い枝 (m, w) に関して $w \succeq_m M_{opt}(m)$ であることが言える。なぜなら、そうでなければ $(m, M_{opt}(m))$ が M で不安定ペアとなるからである。同様に、$m \succeq_w M_{opt}(w)$ であることが言える。また、$w =_m M_{opt}(m)$ あるいは $m =_w M_{opt}(w)$ のどちらかであることもわかる。なぜなら、そうでなければ (m, w) が M_{opt} で不安定ペアとなるからである。(図 2 は良い枝 (m, w) の例である。実線は OPT-枝を表しており、点線は M-枝 (良

い枝) を表している。)

[**補題** *3.3*] t を任意の正整数とする。もし、$|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + t$ ならば、$G_{M_{opt},M}$ 中の悪い枝の数は $4t$ 本以下である。

証明. まず初めに、$G_{M_{opt},M}$ には長さ 1 のパスが存在しないことを示す。仮に長さ 1 のパス（(m,w) とする）が存在し、それが OPT-枝だとする。m と w は M_{opt} でマッチしているため、希望リストにお互いの名前を書いている。しかし、彼らは両方とも M でシングルである。よって (m,w) は M で不安定ペアとなり、M が安定であることに矛盾する。(m,w) が M-枝だとした場合も、同様の議論で矛盾を導くことができる。

$G_{M_{opt},M}$ の連結成分 C を考える。$R(C)$ を C における OPT-枝の数と M-枝の数の比とする。もし C がサイクルならば、OPT-枝と M-枝の数は等しいので、$R(C)=1$ となる。C が偶数長パスの場合も同様である。もし C が M-枝で始まり M-枝で終わる奇数長パスの場合、C において M-枝の方が OPT-枝よりも多いため $R(C)<1$ となる。もし C が OPT-枝で始まり OPT-枝で終わる長さ 3 の奇数長パスの場合、そこに含まれる M-枝は良い枝で、$R(C)=2$ となる。もし C が OPT-枝で始まり OPT-枝で終わる奇数長パスで、長さが 3 よりも大きい場合、$R(C) \leq 3/2$ となる。

今、ℓ_1 本の良い枝と ℓ_2 本の悪い枝があるとする。OPT-枝の数（つまり $|M_{opt}|$）は上記の議論より $2\ell_1 + \frac{3}{2}\ell_2$ 以下である。また、$\ell_1 + \ell_2 = |M|$、$|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + t$ であるので、$\ell_2 \leq 4t$ となる。 □

[**補題** *3.4*] $|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + c\log N$ ならば、P_i に含まれる枝が全て良い枝であるような i が少なくとも 1 つ存在する。

証明. $|P| = (k+4c)\log N$ であった。また補題 3.3 より、M に含まれる悪い枝は $4c\log N$ 本以下なので、P は良い枝を $k\log N$ 本以上含む。アルゴリズムでは、サイズが $k\log N$ であるすべての部分集合を出力するため、良い枝だけで構成されている P_i が必ず存在する。 □

4. サブルーチン Increase $(M,\ S)$

Increase は安定マッチング M と、M の部分集合 S（$|S| = k\log N$）を入力として受け取り、$|M'| > |M|$ であるマッチング M' を出力する。M' は I の安定マッチングでないかもしれないが、 以下のような性質を満たしている。すべての不安定ペア $(m,w) \in BP(M')$ に関して、m か w の少なくともどちらか一方が M' でシングルである。詳細を述べる前に、Increase の実行過程について大まかに説明する。

以下では S が良い枝のみで構成されているものとする。（補題 3.4 で示したように、もし $|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + c\log N$ ならば、良い枝のみで構成された S を Increase の入力として受け取ることができる。）与えられた S に対して、S_i をサイズが $|S|/4$ の S の部分集合とする。S_i の枝はすべて良い枝なので、S_i の各メンバー p の M_{opt} でのパートナー $M_{opt}(p)$ は、M でシングルである。S_i のすべてのカップルを離婚させ、離婚させた彼らに M でシングルである人を新たなパートナーとする。彼らは M_{opt} でのパートナーを見つけることは出来ないかもしれないが、S_i のすべての可能性を試せば、少なくとも 1 つ良い結果を得ることができる。ここで言う良い結果とは、S_i のすべての人が M_{opt} でのパートナー以上の人を新たなパートナーとして見つけることである。もし S_i のすべての可能性（つまり M の部分集合のなかでサイズが $\frac{k}{4}\log N$ であるものすべて）を試せば、上記のような良い部分集合が見つけれるが、計算時間が多項式時間を超えてしまう。ここで重要な点は、サイズが $4|S_i|$ である集合を一つ固定し、その全ての部分集合を試せば十分であるということである（補題 4.2）。L を新しく加えられた枝の集合とする。この時、$|L| = 2|S_i|$ は明らかで、M に比べ $|S_i|$ だけサイズが増えていることがわかる（図 3 を参照。）

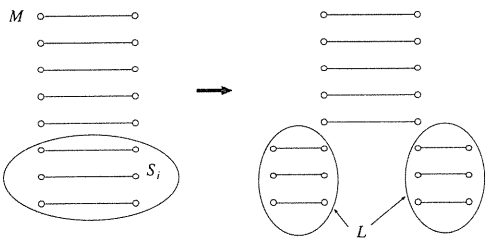

図 3 Increase の前半部分

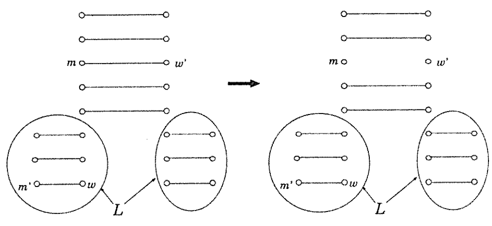

図 4 Increase の後半部分

アルゴリズムの後半部分で以下のようなことを行う。もし不安定ペア (m,w) で、m と w 両方がパートナー（それぞれ w' と m' とする）を持っている場合、(m,w') と (m',w) という 2 つの枝のうち、ちょうど一方だけが L に含まれることを示すことができる。（図 4 参照。）そこで L に**含まれない方**を取り除く。この手続きでマッチングのサイズが減ってしまうが、減少するサイズが $|S_i|$ より小さいということを証明する。従って、全体で少なくとも 1 はマッチングのサイズを増やすことができる。

図 6 にアルゴリズム Increase の詳細な記述を与える。

4.1 Increase の正当性

ここでは Increase の処理が成功するための十分条件を与える。

[**補題** *4.1*] もし S が良い枝のみで構成されており、$|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + c\log N$ ならば、Increase の処理が成功する i の選び方が必ず 1 通りは存在する。

この補題を証明するために、まずいくつかの補題を示す。補題 4.1 の仮定（S が良い枝のみで構成されており、$|M| \leq \frac{|M_{opt}|}{2} + c\log N$ であるという仮定）は、以下の補題の記述の中で明示的には述べないが、全ての補題において仮定されているものとする。

[**補題** *4.2*] 以下のような整数 i^* が存在する。Gale-Shapley アルゴリズム（図 6 の 5 行目と 6 行目）を実行した後、$S^m_{i^*} \cup S^w_{i^*}$ の全てのメンバーが、M_{opt} でのパートナーかそれ以上の人とマッチしている。

証明. 以下の操作を考える。（この操作は補題の証明のためだ

けに行うものであり、アルゴリズムの実行とは関係ない。実際、アルゴリズムには M_{opt} が分からないため、当然実行することはできない。）S^m と S^w をそれぞれ、S の男性すべてと女性すべての集合とする。$S^m \cup S^w \cup F^m \cup F^w$ に含まれるすべてのメンバーの希望リストを、Increase の実行時に行ったのと同様に修正する。この時、S の要素はすべて良い枝で、$S^m \cup S^w$ の中のすべてのメンバー p に関して、$M_{opt}(p)$ は $F^m \cup F^w$ に含まれるため、p のリストから取り除かれることはない。さらに、$m(\in S^m)$ のリストそれぞれから、$M_{opt}(m)$ より厳密に下位にあるすべての女性の名前を取り除く。同様に、$w(\in S^w)$ のリストそれぞれから $M_{opt}(w)$ より厳密に下位にあるすべての男性の名前を取り除く。

次に、男性プロポーズ版の Gale-Shapley アルゴリズムを S^m と F^w によって定義された例題に適用させる。この Gale-Shapley アルゴリズムが終了したときに、少なくとも S^m の半分はマッチしていることが簡単にわかる。このことを示すために、背理法を用いる。$A \subseteq S^m$ を Gale-Shapley アルゴリズムの終了時点でシングルの男性集合とする。（この時、$|A| > |S^m|/2$ である。）すると、A の各男性 m はそれぞれ、$M_{opt}(m)$ によってプロポーズを断られたことになる。（$M_{opt}(m)$ は m のリストに含まれていることは上で述べた。）$M_{opt}(m)$ が m のプロポーズを断るということは、$M_{opt}(m)$ はその時点で m よりも好みの男性とマッチしており、Gale-Shapley アルゴリズムの実行過程において二度とシングルにはならない。そのため、終了時には $|S^m|/2$ 人以上の女性がマッチしているはずである。つまり、$|S^m|/2$ 人以上の男性がマッチしており矛盾となる。

今、もし Gale-Shapley アルゴリズムを実行した後に $m \in S^m$ にパートナーがいれば、m を**成功者**と呼ぶ。女性 $w \in S^w$ の M におけるパートナー $M(w)$ が成功者である場合、その女性 w も同様に**成功者**と呼ぶ。（上の議論より、$|S|/2$ 人以上の女性成功者がいる。）さらに、女性がプロポーズを行う Gale-Shapley アルゴリズムを S^w の中の女性成功者全員と F^m で定義された例題に適用させる。もし得られたマッチングの中で、女性成功者がパートナーを得ることができたら、その女性を**大成功者**と呼ぶ。上記と同様の理由で、全ての女性成功者の少なくとも半分は大成功者である。w が大成功者である場合、$(m, w) \in S$ のことを**大成功ペア**と呼ぶ。少なくとも $|S|/4$ の大成功ペアが存在する。

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ はサイズが正確に $|S|/4$ である S の部分集合全てであるため、大成功ペアのみからなる部分集合 S_i が少なくとも 1 つ存在する。そのような i のうちの 1 つを i^* とする。サブルーチン Increase が（6, 7 行目の）Gale-Shapley アルゴリズムを実行した後に、$S^m_{i^*}$ と $S^w_{i^*}$ に含まれるメンバー全員が、少なくとも上記の手続きで得られるパートナーと比べて同等もしくはそれより好みのパートナーとマッチするのは、簡単な議論によって示すことができる。従って補題が成り立つ。□

以下の一連の補題において、i^* は補題 4.2 の条件を満たすものとする。

［**補題** *4.3*］ 図 6 の 11 行目で定義される M_{i^*} は、以下の (1) と (2) の条件を満たす。(1) $|M_{i^*}| = |M| + \frac{k}{4}\log N$. (2) M_{i^*} で m と w 両方がマッチしてるような任意の不安定ペア $(m, w) \in BP(M_{i^*})$ を考えた時、$(m, M_{i^*}(m))$ と $(M_{i^*}(w), w)$ のうちどちらか一方は $M_{i^*} - L$ に含まれており、もう一方は L に含まれている。

証明. (1) $|S_{i^*}| = |S|/4 = \frac{k}{4}\log N$ で、$|L| = 2|S_{i^*}|$ である。よって、$|M_{i^*}| = |M| - |S_{i^*}| + |L| = |M| + |S_{i^*}| = |M| + \frac{k}{4}\log N$.

(2) まず、$(m, M_{i^*}(m))$ と $(M_{i^*}(w), w)$ 両方が $M_{i^*} - L$ に含まれていると仮定する。M_{i^*} の構成法より、この 2 つのペア両方が M に含まれている。このことから、$(m, w) \in BP(M)$ となり、M が安定であるということに矛盾する。

次に、$(m, M_{i^*}(m))$ と $(M_{i^*}(w), w)$ 両方が L に含まれていると仮定する。この時、4 つの場合が考えられる。(i) $m \in F^m$ で $w \in F^w$ の場合、(ii) $m \in S^m_{i^*}$ で $w \in F^w$ の場合、(iii) $m \in F^m$ で $w \in S^w_{i^*}$ の場合、(iv) $m \in S^m_{i^*}$ で $w \in S^w_{i^*}$ の場合である。

Case (i): F^m と F^w の定義より、m と w は両方とも M でシングルである。しかし、(m, w) は M_{i^*} で不安定ペアであるため、m と w はお互いにリストに相手の名前を書いている。このことは (m, w) が M でも不安定ペアであることを意味し、M の安定性に矛盾する。

Case (ii): (m, w) は M_{i^*} で不安定ペアであるという仮定より、$w \succ_m M_{i^*}(m)$ である。$w \in F^w$ なので、Gale-Shapley アルゴリズムを適用するために m のリストを修正した時にも w の名前は m のリストに残っている。そのため、5 行目で Gale-Shapley アルゴリズムを実行している時に、m は w にプロポーズを行っているはずである。このことから、w は m のプロポーズを断っていることになり、$M_{i^*}(w) \succeq_w m$ ということになる。よって (m, w) は M_{i^*} で不安定ペアとはならず矛盾する。

Case (iii): Case (ii) と同様。

Case (iv): (m, w) は M_{i^*} で不安定ペアなので、$w \succ_m M_{i^*}(m)$, $m \succ_w M_{i^*}(w)$ である。ここで、補題 4.2 より、$M_{i^*}(m) \succeq_m M_{opt}(m)$,$M_{i^*}(w) \succeq_w M_{opt}(w)$ である。よって、$w \succ_m M_{opt}(m)$,$m \succ_w M_{opt}(w)$ となるが、このことは (m, w) が M_{opt} で不安定ペアとなり、M_{opt} の安定性に矛盾する。□

補題 4.1 の証明を完成させるために、図 6 の 22 行目にある $|M_{i^*}|$ のサイズを保証したい。そのために**困惑ペア**を定義する。困惑ペアは入力である安定マッチング M に対して定義される。

$M(m) = w$ であるような男性 m と女性 w を考える。ここで、m と w が以下のような 3 条件を満たすとき、(m, w) は M **で困惑ペア**という。(i) m と w には M_{opt} でパートナーがいる、(ii) $w \succeq_m M_{opt}(m)$、(iii) $m \succeq_w M_{opt}(w)$。以上のような 3 条件を満たさないとき、(m, w) は M **で非困惑ペア**という。

［**補題** *4.4*］ M での非困惑ペアの数は $2c\log N$ 以下である。

証明. 3 節で定義された二部グラフ $G_{M_{opt},M}$ を考える。以前にも触れたように、$G_{M_{opt},M}$ の連結成分は、パスかサイクルか孤立点である。これらの連結成分の中で、奇数長のパスによってのみ M_{opt} と M のサイズの差が発生する。このことから、OPT-枝で始まり OPT-枝で終わるパスが $|M_{opt}| - |M|$ 本以上存在することがわかる。このようなパスそれぞれに、少なくとも 1 つの困惑ペアが存在することをこれから示す。

奇数長パスであるため、パスの両端はそれぞれ男性と女性である。そのため一般性を欠くことなく、このようなパスを $m_1, w_1, m_2, w_2, \ldots, m_\ell, w_\ell$ と表すことができる。（ただし、$w_i = M_{opt}(m_i)(1 \leq i \leq \ell)$ であり、$w_{i-1} = M(m_i)(2 \leq i \leq \ell)$ である。）このパスに困惑ペアがないと仮定する。m_1 は M でシングルであるため、$m_2 \succeq_{w_1} m_1$ である。（そうでなければ (m_1, w_1) が M に対する不安定ペアとなる。）次に、も

し $w_1 \succeq_{m_2} w_2$ ならば、(m_2, w_1) は M で困惑ペアであり、このことは仮定に矛盾する。そのため、$w_2 \succ_{m_2} w_1$ であるはずである。同様の議論を続けることによって、$m_3 \succeq_{w_2} m_2$, $w_3 \succ_{m_3} w_2, \cdots$ となる。最終的に、$w_\ell \succ_{m_\ell} w_{\ell-1}$ が導ける。しかし、w_ℓ は M でシングルであるため、(m_ℓ, w_ℓ) は M の不安定ペアとなり、矛盾する。

よって、$|M| \leqq \frac{|M_{opt}|}{2} + c \log N$ なので、困惑ペアの数は $|M_{opt}| - |M| \geqq \frac{|M_{opt}|}{2} - c \log N$ 以上である。つまり、M での非困惑ペアの数は $2c \log N$ 以下である。 □

［**補題** *4.5*］ Increase の 22 行目の M_{i^*} は $|M_{i^*}| > |M|$ を満たしている。

証明. まず初めに、補題 4.2 より Increase は $i = i^*$ の時 7, 8 行目で決して失敗しない。また、補題 4.3 (2) より $i = i^*$ の時 while ループの実行中に Increase が失敗することはない。補題 4.3 (1) より、$|M_{i^*}| = |M| + \frac{k}{4} \log N$ である。しかし、while ループの実行中に $M_{i^*} - L$ からいくつかペアが取り除かれ、M_{i^*} のサイズが小さくなるかもしれない。$M_{i^*} - L$ のペアは全て M でのペアであったことに注意されたい。これから先、もし while ループにおいて $M_{i^*} - L$ のペアが取り除かれたなら、そのペアは M で非困惑ペアということを示す。もしもこのことが正しければ、補題 4.4 より、while ループにおいて取り除かれるペア数は高々$2c \log N$ であり、$|M_{i^*}| \geqq |M| + \frac{k}{4} \log N - 2c \log N > |M|$ である。($c < \frac{k}{8}$ であるため。)

Increase の while ループにおいて M_{i^*} からペアが取り除かれたとする。このことは、M_{i^*} に対して (m, w) という不安定ペアが存在し、m と w 両方のが M_{i^*} でマッチしてるということを意味する。これには以下の 2 通りの場合が考えられる。(1) $(m, M_{i^*}(m)) \in L$ で $(M_{i^*}(w), w) \in M_{i^*} - L$ (つまり、$(M_{i^*}(w), w)$ が取り除かれる)。(2) $(m, M_{i^*}(m)) \in M_{i^*} - L$ で $(M_{i^*}(w), w) \in L$ (つまり、$(m, M_{i^*}(m))$ が取り除かれる)。ここでは Case (1) を考える。(Case (2) も同様にして考えられる。) 取り除かれたペア $(M_{i^*}(w), w)$ が M で困惑ペアであったと仮定し、矛盾を導く。

Case (1) について、さらに 2 通りのケースに分ける。(1-1) $m \in F^m$、(1-2) $m \in S^m_{i^*}$ の 2 通りである。

Case (1-1): $m \in F^m$ なので、m は M でシングルである。まず、$(M_{i^*}(w), w) \in M_{i^*} - L$ であるので、w と $M_{i^*}(w)$ は M でマッチしている。つまり、$M_{i^*}(w) = M(w)$ である。$(m, w) \in BP(M_{i^*})$ であるため、$(m, w) \in BP(M)$ となり、M が安定であることに矛盾する。(この場合、$(M_{i^*}(w), w)$ は M で困惑ペアであるという仮定を用いなくても矛盾を導ける。)

Case (1-2): $(M_{i^*}(w), w)$ は M で困惑ペアであると仮定したため、$M(w) \succeq_w M_{opt}(w)$ である。上記 (1-1) と同様の理由で、$M_{i^*}(w) = M(w)$ である。よって、$M_{i^*}(w) \succeq_w M_{opt}(w)$ である。(m, w) は M_{i^*} の不安定ペアであるため、$m \succ_w M_{i^*}(w) \succeq_w M_{opt}(w)$ となる。次に、$S^m_{i^*}$ に含まれると仮定した m を考える。補題 4.2 より、$M_{i^*}(m) \succeq_m M_{opt}(m)$ である。(m, w) は M_{i^*} の不安定ペアであるため、$w \succ_m M_{i^*}(m)$ である。そのため、$w \succ_m M_{i^*}(m) \succeq_m M_{opt}(m)$ である。したがって、(m, w) は $BP(M_{opt})$ となり矛盾する。 □

以上で補題 4.1 の証明は完了した。 □

5. サブルーチン Stabilize (M_0)

Stabilize は入力としてマッチング M_0 を受け取り、サイズを減らすことなく安定させる。M_0 での不安定ペア (m, w) はすべて、少なくとも m か w は M_0 でシングルである。マッチング M に対し、$BP_{s,m}(M) \subseteqq BP(M)$ を、m が M でシングルで w が M でマッチしているような M での不安定ペア (m, w) すべての集合とする。同様に、$BP_{m,s}(M)$ ($BP_{s,s}(M)$, $BP_{m,m}(M)$) を、m が M でマッチしていて w が M でシングルである (m と w 両方がシングル, m と w 両方がマッチしている) ような M での不安定ペア (m, w) すべての集合とする。さらに $BP_{-,s}(M) = BP_{m,s}(M) \cup BP_{s,s}(M)$ と定義する。図 7 はサブルーチン Stabilize の詳細な記述である。

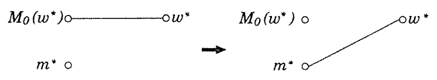

図 5 Stabilize による更新

5.1 Stabilize の正当性

［**補題** *5.1*］ Stabilize の 4 行目の操作によって M_0 が以下のように更新されたとする (図 5 を参照)。

$$M'_0 := M_0 - \{(M_0(w^*), w^*)\} \cup \{(m^*, w^*)\}.$$

すると、次の (1) から (3) が成り立つ。(1) $M'_0(w^*) \succ_{w^*} M_0(w^*)$ で、すべての $w (\neq w^*)$ について $M'_0(w) = M_0(w)$ である。(2) $|M'_0| = |M_0|$ である。(3) もし $BP_{m,m}(M_0) = \emptyset$ ならば、$BP_{m,m}(M'_0) = \emptyset$ である。

証明. (1) (m^*, w^*) は $BP(M_0)$ に含まれるので、$m^* \succ_{w^*} M_0(w^*)$ である。そして、$M'_0(w^*) = m^*$ であるため、$M'_0(w^*) \succ_{w^*} M_0(w^*)$ である。(1) の後半部分は、すべての女性の中で w^* だけしかパートナーが変わっていないため明らかである。

(2) 自明である。

(3) M_0 から M'_0 に更新された時にパートナーが変わる 3 人のメンバーに注目する。w^* はより好みの男性と組み、$M_0(w^*)$ はマッチしている状態からシングルになり、m^* はシングルからマッチしている状態になる。そのため M_0 から M'_0 に更新されることによって生じる不安定ペアはすべて男性 $M_0(w^*)$ に関するものである。$M_0(w^*)$ は M'_0 でシングルであるので、$BP(M'_0) - BP(M_0)$ のどのペアも $BP_{m,m}(M'_0)$ に含まれない。

次に、$(m, w) \in BP(M'_0) \cap BP(M_0)$ を考える。$BP_{m,m}(M_0) = \emptyset$ なので、m と w の少なくともどちらか一方は M_0 でシングルである。m^* だけがシングルからマッチした状態になるために、もし $m \neq m^*$ ならば、$(m, w) \notin BP_{m,m}(M'_0)$ である。

ここで、不安定ペア $(m^*, w) \in BP(M'_0) \cap BP(M_0)$ を考える。もし w が M_0 でシングルならば、w は M'_0 でもシングルであり、$(m^*, w) \notin BP_{m,m}(M'_0)$ である。そこで、w は M_0 でマッチしていると仮定する。この時、(m^*, w^*) と (m^*, w) は両方とも $BP_{s,m}(M_0)$ に含まれる。そのため、w^* と w の両方が M'_0 で m^* とマッチする候補者だったことになる。w^* が選ばれたということは、$w^* \succeq_{m^*} w$ のはずである。したがって、(m^*, w) は M'_0 で不安定ペアになり得ず、矛盾する。

以上により $BP(M'_0) - BP(M_0)$ と $BP(M'_0) \cap BP(M_0)$ に含まれるどの要素も $BP_{m,m}(M'_0)$ に含まれないことを示した。 □

［**補題** *5.2*］ Stabilize の 10, 12 行目の操作で M_0 が以下のように更新されたとする。

(10 行目) $M_0' := M_0 - \{(m^*, M_0(m^*))\} \cup \{(m^*, w^*)\}.$

(12 行目) $M_0' := M_0 \cup \{(m^*, w^*)\}.$

このとき、次の (1) から (3) が成り立つ。(1) 10 行目を実行する場合、$M_0'(m^*) \succ_{m^*} M_0(m^*)$ であり（12 行目を実行する場合、m^* は M_0' でマッチした状態に変わり）、すべての $m(\neq m^*)$ に対して $M_0'(m^*) = M_0(m^*)$ である。(2) $|M_0'| \geqq |M_0|$ である。(3) もし $BP_{s,m}(M_0) \cup BP_{m,m}(M_0) = \emptyset$ ならば、$BP_{s,m}(M_0') \cup BP_{m,m}(M_0') = \emptyset$ である。（証明略）

［**補題** *5.3*］ M' を Stabilize の出力とすると、$|M'| \geqq |M_0|$ で、M' は安定である。

証明． Stabilize の 4 行目の操作を考える。補題 5.1 (1) より、少なくとも 1 人の女性がより好みの男性と組み替え、その他の女性はパートナーが変わらない。N 人の女性が各々最大長さ N の希望リストを持っているため、最初の while ループの繰り返しは高々N^2 回である。M'' を Stabilize が 2 つ目の while-ループに入る直前のマッチングとする。つまり $BP_{s,m}(M'')$ は空である。（これは Stabilize が最初の while-ループを抜ける条件である。）$BP_{m,m}(M_0)$ は空であるため、補題 5.1 (3) を繰り返し適用させることによって $BP_{m,m}(M'')$ は空であることを示すことができる。この 2 つの事実を組み合わせることによって、$BP_{s,m}(M'') \cup BP_{m,m}(M'')$ は空であると言える。また補題 5.1 (2) より、$|M''| = |M_0|$ である。

上記と同様に、10, 12 行目の各操作によって男性はより好みの女性とパートナーを組替え（補題 5.2 (1)）、そのために 2 つ目の while ループの繰り返しの数は N^2 以下である。$BP_{s,m}(M'') \cup BP_{m,m}(M'') = \emptyset$ なので、補題 5.2 (3) を繰り返し適用させることによって $BP_{s,m}(M') \cup BP_{m,m}(M') = \emptyset$ を示すことができる。しかし、Stabilize の終了条件は $BP_{-,s}(M') = \emptyset$ であるため、$BP(M')$ は空であり、したがって、M' は安定である。補題 5.2 (2) より $|M'| \geqq |M''|$ であるから、$|M'| \geqq |M_0|$ である。 □

文　献

[1] V. Bansal, A. Agrawal and V. Malhotra, "Stable marriages with multiple partners: efficient search for an optimal solution," *Proc. ICALP 2003*, LNCS 2719, pp. 527–542, 2003.

[2] R. Bar-Yehuda and S. Even, "A local-ratio theorem for approximating the weighted vertex cover problem," In Analysis and Design of Algorithms for Combinatorial Problems, volume 25 of Annals of Disc. Math., Elsevier science publishing company, Amsterdam, pp. 27–46, 1985.

[3] P. Berman and T. Fujito, "On the approximation properties of independent set problem in degree 3 graphs," *Proc. WADS 95*, LNCS 955, pp. 449–460, 1995.

[4] K. Cechlárová, "On the complexity of exchange-stable roommates," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 116, pp. 279-287, 2002.

[5] T. Elde, "Assignment engine," Senior Honours Project Report, Department of Computing Science, University of Glasgow, 2000.

[6] T. Fleiner, "A fixed-point approach to stable matchings and some applications," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 28, Issue 1, pp. 103–126, 2003.

[7] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 69, pp. 9–15, 1962.

[8] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232, 1985.

[9] D. Gusfield and R. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[10] M. Halldórsson, R. Irving, K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, Y. Morita and S. Scott, "Approximability results for stable marriage problems with ties," *Theoretical Computer Science*, Vol. 306, pp. 431–447, 2003.

[11] M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki and Y. Morita, "Inapproximability results on stable marriage problems," *Proc. LATIN 2002*, LNCS 2286, pp. 554–568, 2002.

[12] M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki and H. Yanagisawa, "Randomized approximation of the stable marriage problem," *Proc. COCOON 2003*, LNCS 2697, pp. 339–350, 2003.

[13] M. Halldórsson, K. Iwama, S. Miyazaki and H. Yanagisawa, "Improved approximation of the stable marriage problem," *Proc. ESA 2003*, LNCS 2832, pp. 266–277, 2003.

[14] E. Halperin, "Improved approximation algorithms for the vertex cover problem in graphs and hypergraphs," *Proc. SODA 2000*, pp. 329–337, 2000.

[15] R. Irving, "Stable marriage and indifference," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 48, pp. 261–272, 1994.

[16] R. Irving, "Matching medical students to pairs of hospitals: a new variation on an old theme," *Proc. ESA 98*, LNCS 1461, pp. 381–392, 1998.

[17] R. Irving, D. Manlove and S. Scott, "The hospital/residents problem with ties," *Proc. SWAT 2000*, LNCS 1851, pp. 259–271, 2000.

[18] R. Irving, T. Kavitha, K. Mehlhorn, D. Michail, and K. Paluch, "Rank-maximal matchings," *Proc. SODA 2004*, pp. 68–75, 2004.

[19] R.W. Irving, D.F. Manlove, S. Scott, "Strong stability in the hospitals/residents problem," *Proc. STACS 2003*, LNCS 2607, pp. 439–450, 2003.

[20] K. Iwama, D. Manlove, S. Miyazaki, and Y. Morita, "Stable marriage with incomplete lists and ties," *Proc. ICALP 99*, LNCS 1644, pp. 443–452, 1999.

[21] M. Karpinski, "Polynomial time approximation schemes for some dense instances of NP-hard optimization problems," *Proc. RANDOM 97*, LNCS 1269, pp. 1–14, 1997.

[22] T. Kavitha, K. Mehlhorn, D. Michail, and K. Paluch, "Strongly stable matchings in time $O(nm)$ and extension to the H/R problem," *Proc. STACS 2004*, 2004 to appear.

[23] T. Le, V. Bhushan, and C. Amin, "First aid for the match, second edition," McGraw-Hill, Medical Publishing Division, 2001.

[24] D. Manlove, R. Irving, K. Iwama, S. Miyazaki, Y. Morita, "Hard variants of stable marriage," *Theoretical Computer Science*, Vol. 276, Issue 1-2, pp. 261–279, 2002.

[25] B. Monien and E. Speckenmeyer, "Ramsey numbers and an approximation algorithm for the vertex cover problem," *Acta Inf.*, Vol. 22, pp. 115–123, 1985.

[26] H. Nagamochi, Y. Nishida and T. Ibaraki, "Approximability of the minimum maximal matching problem in planar graphs," Institute of Electronics, Information and Communication Engineering, Transactions on Fundamentals, vol.E86-A, pp. 3251-3258, 2003.

[27] C.P. Teo, J.V. Sethuraman and W.P. Tan, "Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications," *Proc. IPCO 99*, pp. 429–438, 1999.

[28] M. Zito,"Randomized techniques in combinatorial algorithmics," PhD thesis, Dept. of Computer Science, University of Warwick, 1999.

サブルーチン INCREASE (M, S)

$F^m := M$ でシングルの男性すべての集合; $F^w := M$ でシングルの女性すべての集合;
S の部分集合でサイズが $|S|/4$ のものを $S_1, S_2, \cdots, S_n$ とする;
for $i := 1$ **to** m
  $\{S_i^m := S_i$ の男性の集合; $S_i^w := S_i$ の女性の集合;
   男性プロポーズ版の Gale-Shapley アルゴリズムを用いて S_i^m と F^w の間でマッチングさせる;
    (この操作を行うために $S_i^m \cup F^w$ に含まれないメンバーの名前をメンバーそれぞれのリストから取り除き、
     すべての同順位を任意にばらす。)
   女性プロポーズ版の Gale-Shapley アルゴリズムを用いて S_i^w と F^m の間でマッチングさせる;
    (この操作を行うために $S_i^w \cup F^m$ に含まれないメンバーの名前をメンバーそれぞれのリストから取り除き、
     すべての同順位を任意にばらす。)
   if ($\exists p \in S_i^m \cup S_i^w$ s.t. Gale-Shapley アルゴリズムを用いた後に p がシングルである)
    exit **for**-loop; /* この i は良い選択ではなかった */
   else
    $\{L :=$Gale-Shapley アルゴリズムによって得られたすべてのペアの集合;
     $M_i := M - S_i \cup L$;
     while ($\exists(m, w) \in BP(M_i)$ s.t. m と w 両方が M_i でパートナーがいる)
        $\{$**if** ($(m, M_i(m)) \in L$ & $(M_i(w), w) \in L$)
          exit for-loop; /* この i は良い選択ではなかった */
        if ($(m, M_i(m)) \in M_i - L$ & $(M_i(w), w) \in M_i - L$)
          exit for-loop; /* この i は良い選択ではなかった */
        if ($(m, M_i(m)) \in M_i - L$ & $(M_i(w), w) \in L$)
          $M_i := M_i - \{(m, M_i(m))\}$;
        if ($(m, M_i(m)) \in L$ & $(M_i(w), w) \in M_i - L$)
          $M_i := M_i - \{(M_i(w), w)\}$;
        $\}$ /* end **while** */
     if ($|M_i| > |M|$)
       M_i を出力し、終了;
     else exit for-loop; /* この i は良い選択ではなかった */
     $\}$ /* end **else** */
  $\}$ /* end **for** */
"エラー" を出力し、終了;

図 6 サブルーチン INCREASE

サブルーチン STABILIZE (M_0)

while ($BP_{s,m}(M_0) \neq \emptyset$)
  $\{(m, w) \in BP_{s,m}(M_0)$ を選ぶ;
   上記の男性 m が関わる不安定ペア $(m, w') \in BP_{s,m}(M_0)$ の女性 w' の中で、m のリストで最上位にある女性を w^* とする
     (候補が複数いる場合は任意に 1 人選ぶ);
   $M_0 := M_0 - \{(M_0(w^*), w^*)\} \cup \{(m, w^*)\}$;
   $\}$
while ($BP_{-,s}(M_0) \neq \emptyset$)
  $\{(m, w) \in BP_{-,s}(M_0)$ を選ぶ;
   上記の女性 w が関わる不安定ペア $(m', w) \in BP_{-,s}(M_0)$ の男性 m' の中で、w のリストで最上位にある男性を m^* とする
     (候補が複数いる場合は任意に 1 人選ぶ);
   if (m^* が M_0 でマッチしている)
    $M_0 := M_0 - \{(m^*, M_0(m^*))\} \cup \{(m^*, w)\}$;
   else
    $M_0 := M_0 \cup \{(m^*, w)\}$;
   $\}$

図 7 サブルーチン STABILIZE

ミツバ綜合印刷株式会社